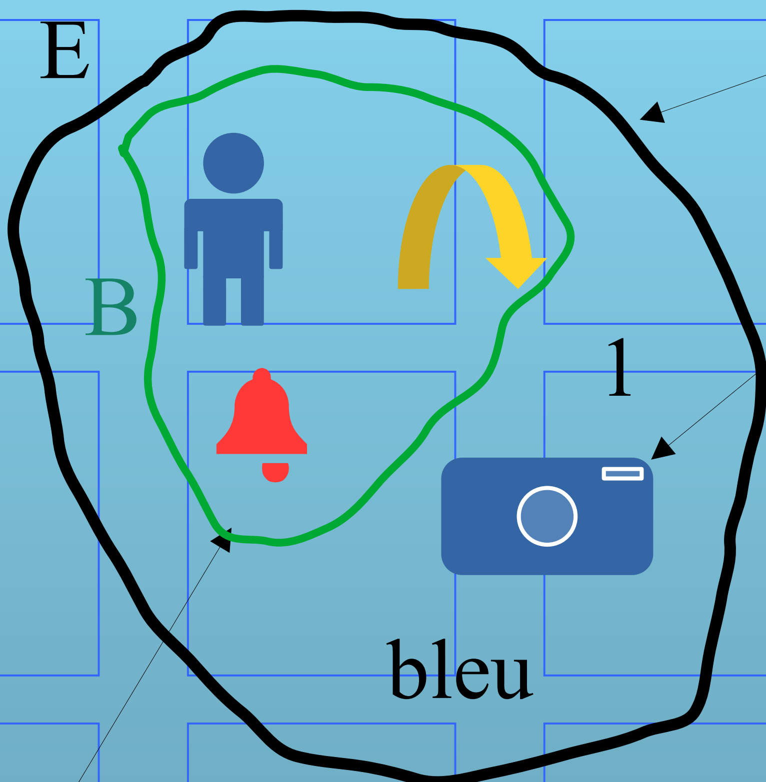
JOUER AVEC L'INFINI…

1- Théorie des ensembles
2 - Bijection
3 - Hotel de Hilbert
4 – Nombre de Graham

THEORIE DES ENSEMBLES

Ensemble E

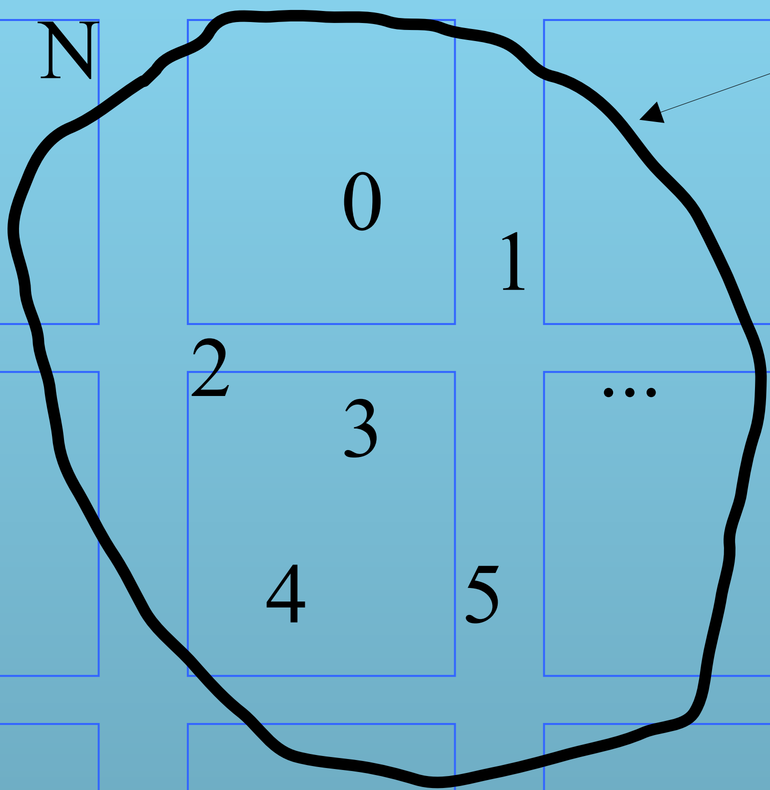


élément

Cardinal de E est le nombre d’éléments qui se trouvent dans l’ensemble E.
Dans notre cas : 6

Sous-ensemble B
Card B = 3

THEORIE DES ENSEMBLES



Ensemble des entiers naturels

N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Par définition, Cardinal de N = ∞

(∞ lemniscate)

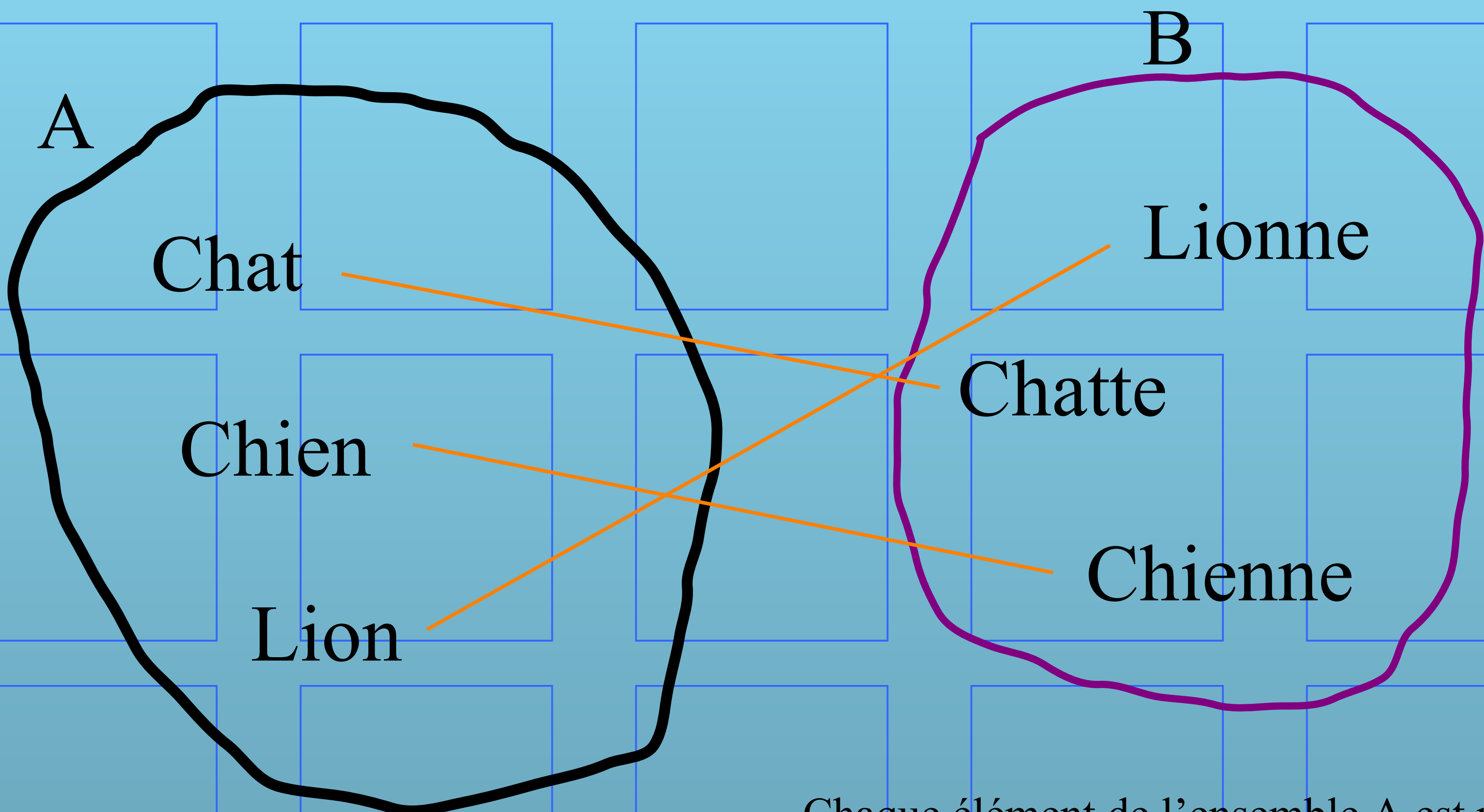
THEORIE DES ENSEMBLES

Pour **N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}** Card N = ∞

Pour **E={-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}** Card E = ?

BIJECTION

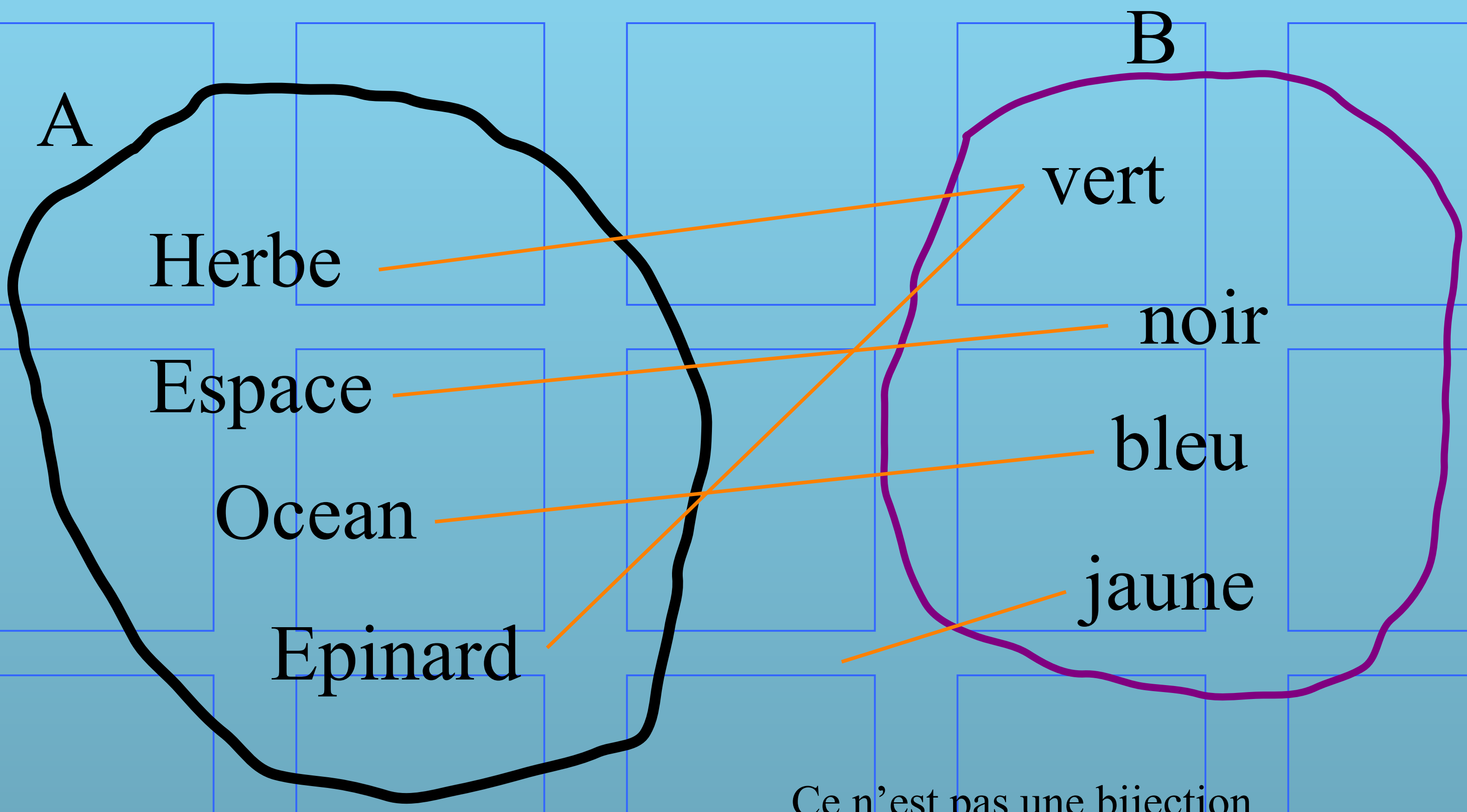
Relation : … est la femelle de...



Chaque élément de l’ensemble A est relié à un élément de B, et réciproquement

BIJECTION

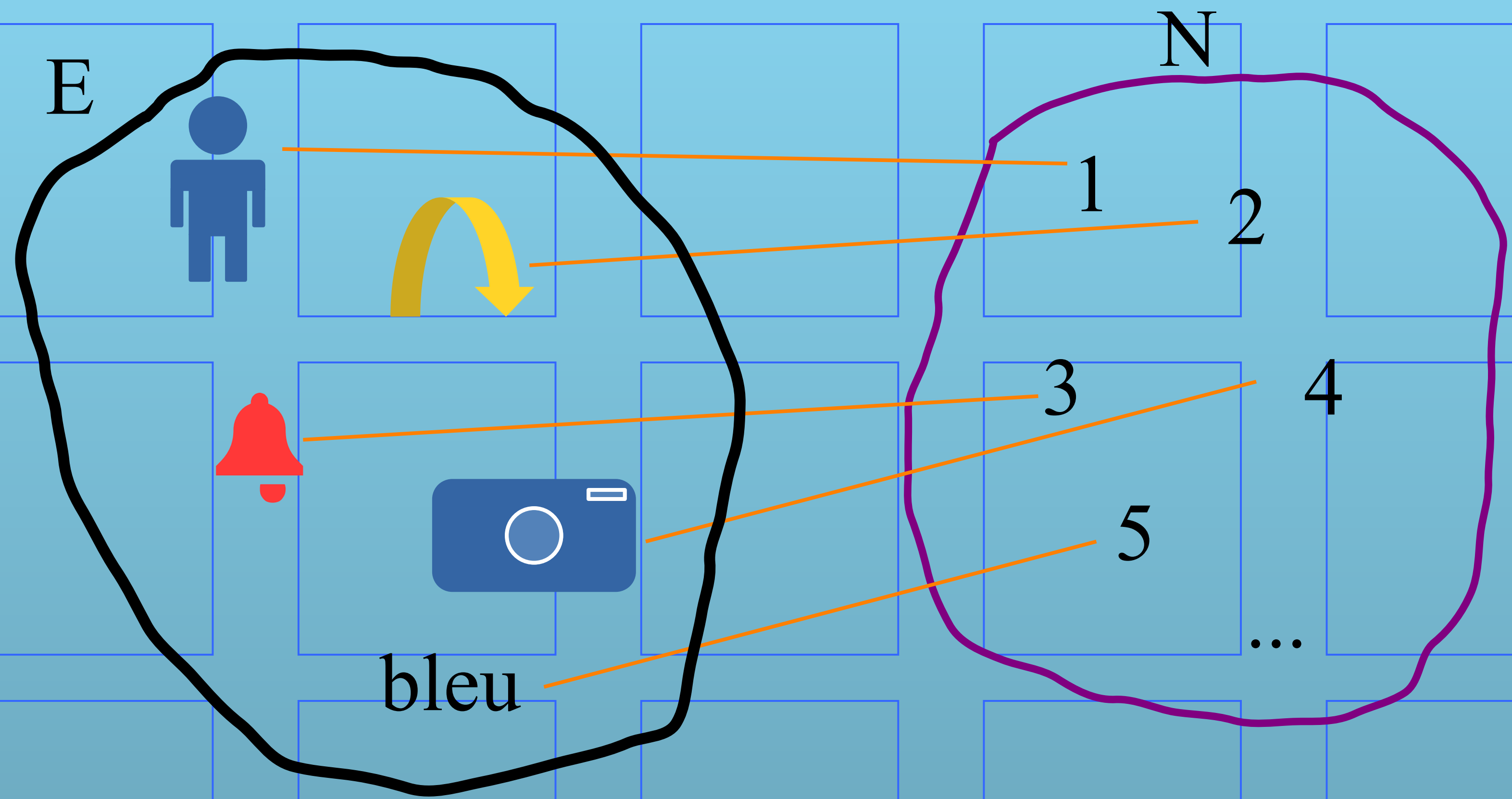
Relation : … couleur de l'élément...



Ce n'est pas une bijection

BIJECTION

Quand on compte, on fait une bijection ...



Card E = 5

THEORIE DES ENSEMBLES

Pour **N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,…}** Card N = ∞

Pour **E={-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}** Card E = ?

Si on applique la bijection, on a Card E = ∞

THEORIE DES ENSEMBLES

Pour **N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,…}** Card N = ∞

Pour **E={-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}** Card E = ?

Si on applique la bijection, on a Card E = ∞

Pour **F={...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}**

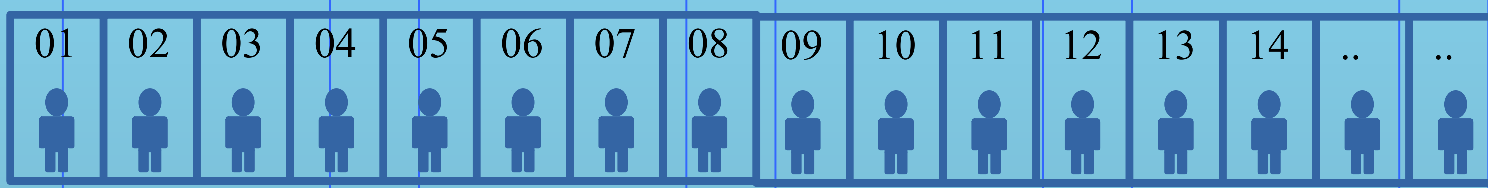
C’est aussi vrai pour F, Card F = ∞

Cet infini est dit dénombrable, c’est-à-dire qu’on peut «compter» le nombre d’éléments

HOTEL DE HILBERT

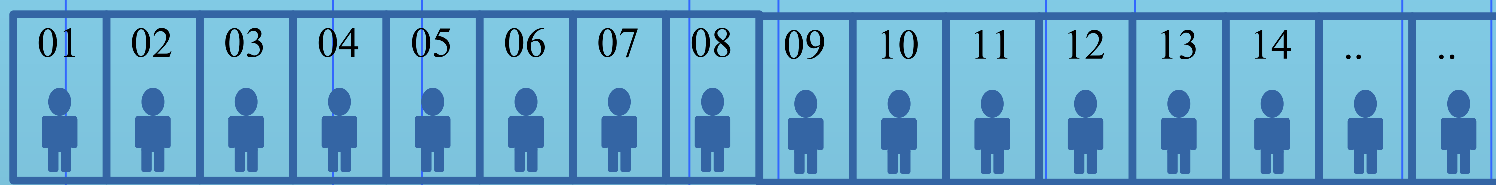
1862 - 1943

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



HOTEL DE HILBERT

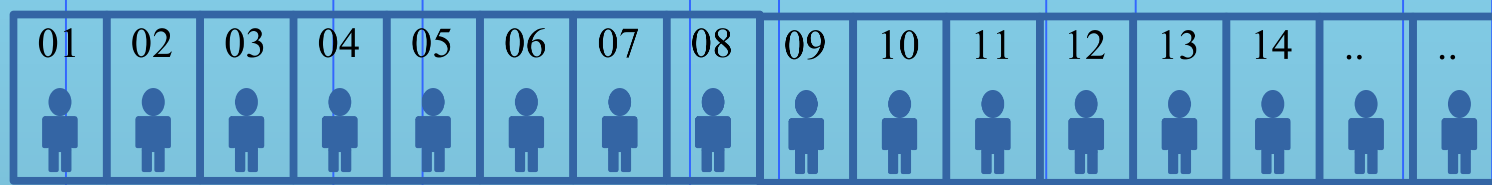
HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



Un client se présente

HOTEL DE HILBERT

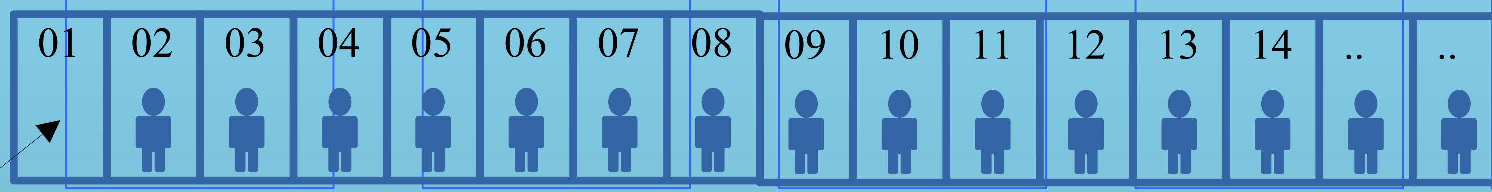
HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres

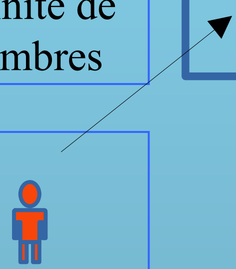


Décaler chaque locataire d'une chambre vers la droite

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres

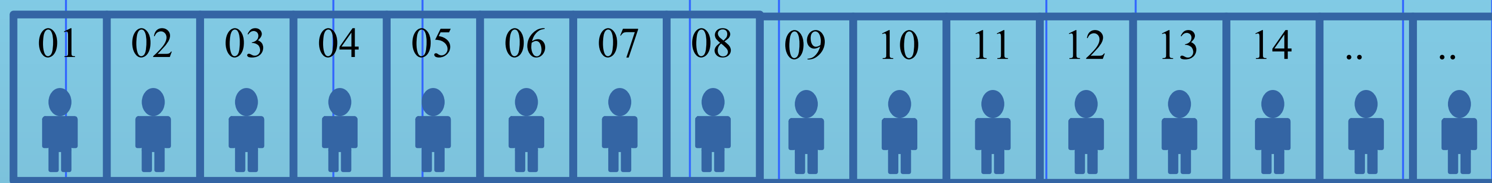




On fait une correspondance parfaite entre les chambres et les personnes → bijection

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres

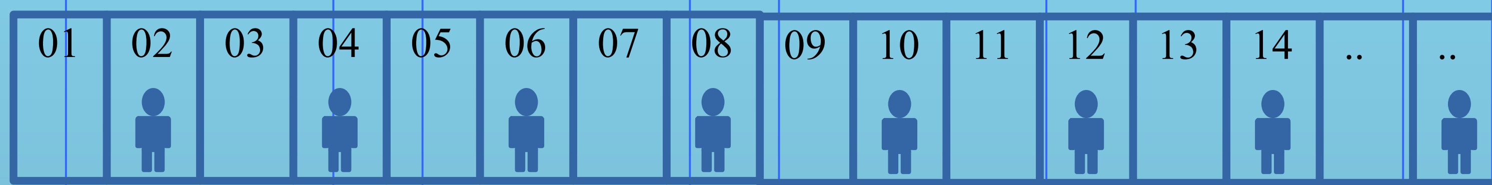


…..

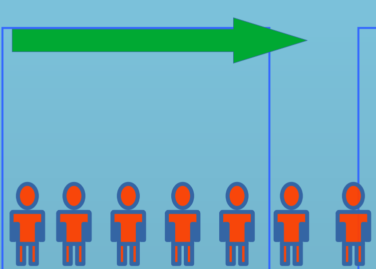
Un bus avec une infinité de clients se présente

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



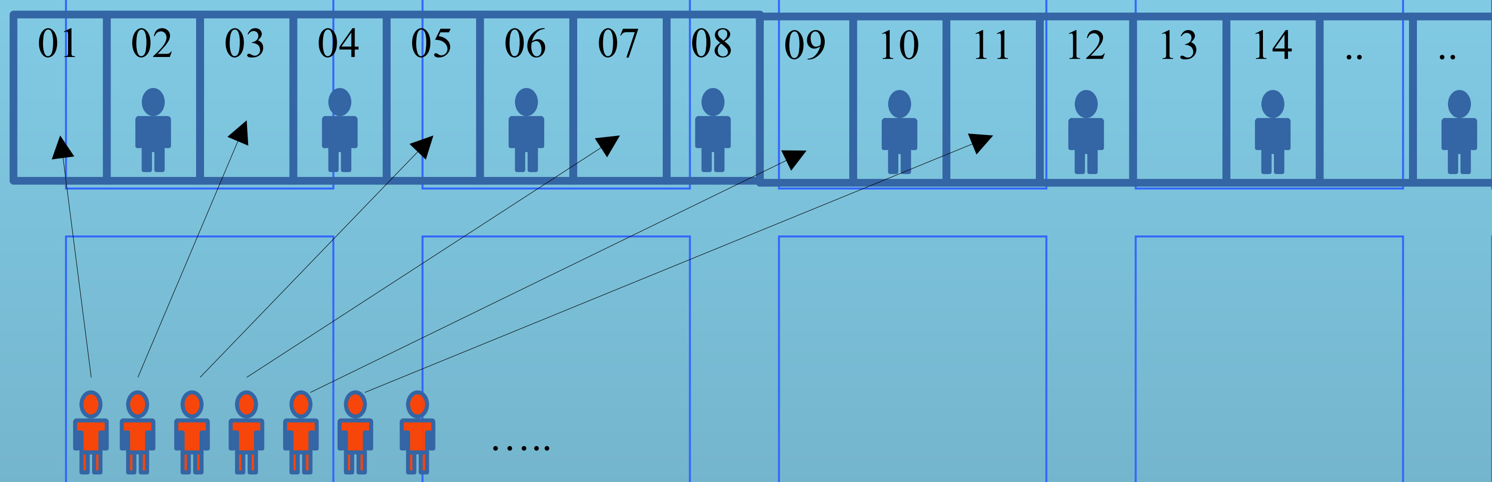
Chaque locataire va dans une chambre qui a un numéro double du sien



…..

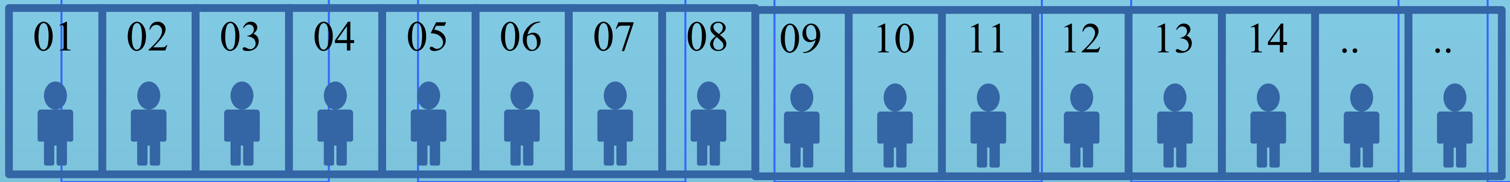
HOTEL DE HILBERT

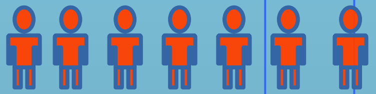
HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



HOTEL DE HILBERT

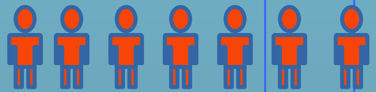
HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres





…..

…..

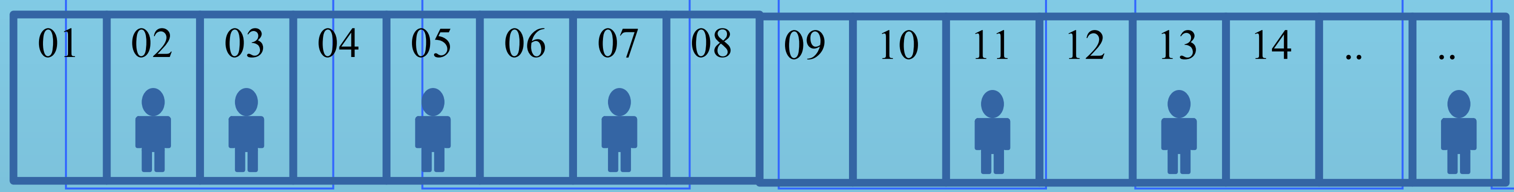


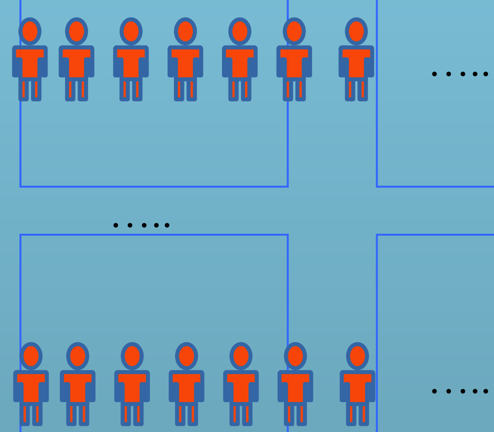
…..

Une infinité de bus avec une infinité de clients se présente

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres

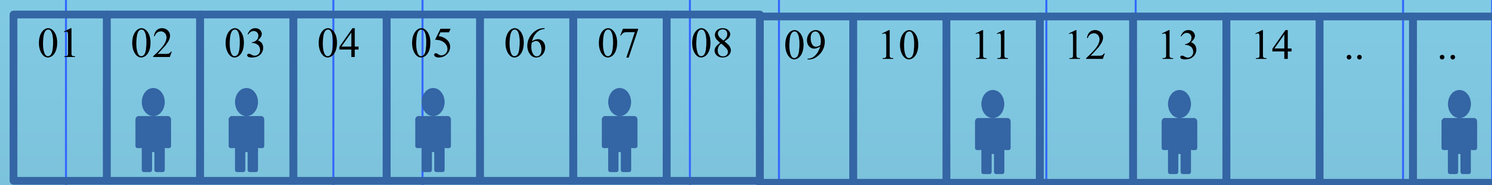




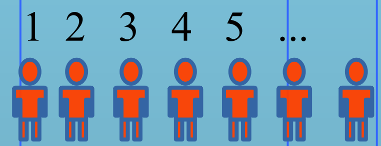
Chaque locataire va se déplacer sur le ième nombre premier correspondant à sa chambre

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



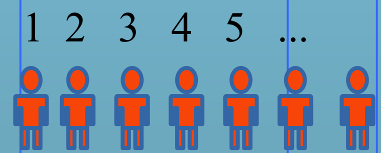
Bus 1



…..

…..

Bus j



…..

Les nouveaux locataires iront dans la chambre 2^i*3^j, avec i=no du bus, j=no de la place dans le bus, par exemple : bus=2, place=1 → chambre 12. C'est une paire d'entier <i, j>

Il est impossible d'avoir 2 personnes dans la même chambre.

On remarque qu'il restera des chambres libre, par exemple 10, 14, etc.

Paire d’entier

Bus					
...					
4					
3	5				
2	2	4	7		
1	0	1	3	6	
	1	2	3	4	...

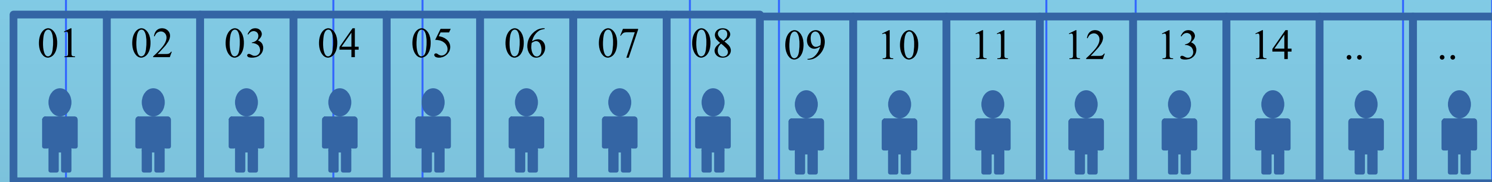
client

Autre méthode de représenter N^2

Card N^2 = card N

HOTEL DE HILBERT

HOTEL
Avec une
Infinité de
chambres



…..

Une infinité de bateaux avec une infinité bus avec une infinité de clients se présente ...

On peut continuer ce jeux avec une infinité de planètes contenant une infinité de bateaux, contenant ….

Mais c’est quoi infini ? Ça va jusqu’à où ? C’est grand comment ?

Pour se fixer les idées

Un éphémère vit environ 1 jour → 86’400 [seconde]

Un homme vit un peu moins de 100 [an] → 3’153’000’000 [seconde] (ou 3.15 * 10^9 [seconde], environs 36’500 [jour])

PS : 36’000 jours, ça ne paraît pas beaucoup. Il me reste peut-être encore 7’300 jours à vivre...

Mais qu'est-ce qui est plus grand ?

Les physiciens admettent qu'il y a 10^{80} atomes dans tout notre univers connu.

Un nombre « connu » : le gogol = 10^{100}
Si on devait écrire ce nombre en prenant 1 atome par chiffre, il faudrait 100 milliard de milliard d'univers !

C'est assez grand ? Et le gogolplex = $10^{gogol} = 10^{10^{100}}$

Si je prends un jeu de tarot, avec 78 cartes, on trouve 78 ! (factoriel) combinaisons possibles, soit $1.13*10^{115}$

Nombre de théories incluses dans la Théorie des cordes, 10^{500}

Voilà pour le grand. Mais encore...

NOTATION

Au fait comment interpréter 3^{3^3} ?

(a) 3 ** (3 ** 3) = 3 ** 27 = 7’625’597’484’987 = 7.625 * 10^{12}

(b) (3 ** 3) ** 3 = 27 ** 3 = 19’683

C’est la première (a) interprétation qui est la bonne.
Les puissances de puissance éclatent très rapidement.

Prendre l’interpréteur Python. Il calcule avec toutes les décimales. Faire
5**5
5**5**5
Ça éclate vite...

NOTATION

Donald Knuth introduit la notation suivante :

$5^3 = 5 \uparrow 3$

Ce qui veut dire que

$5 \uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow 5 \uparrow 5 = 5^{5^5}$ (on a 3 x 5 avec 2 flèches)

Alors

$5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow 5 \uparrow\uparrow 5 = 5 \uparrow\uparrow (5^{5^5}) = 5 \uparrow\uparrow$ (cf résultat dans python !)

Etc...

NOMBRE DE GRAHAM

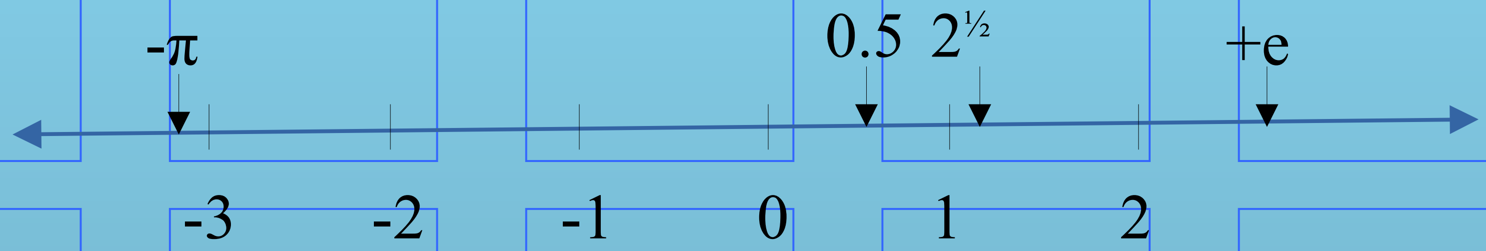
$$\left.\begin{matrix} G = & \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3} \\ & \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3} \\ & \vdots \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \mathrm{G1} & \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow 3} \\ \mathrm{G0} & 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 niveaux}$$

Ça c’est un très très grand nombre !!!
Le nombre de Graham G est la valeur du $64^{\text{ème}}$ niveau.

C’est tellement grand qu’il n’est même plus imaginable !

THEORIE DES ENSEMBLES

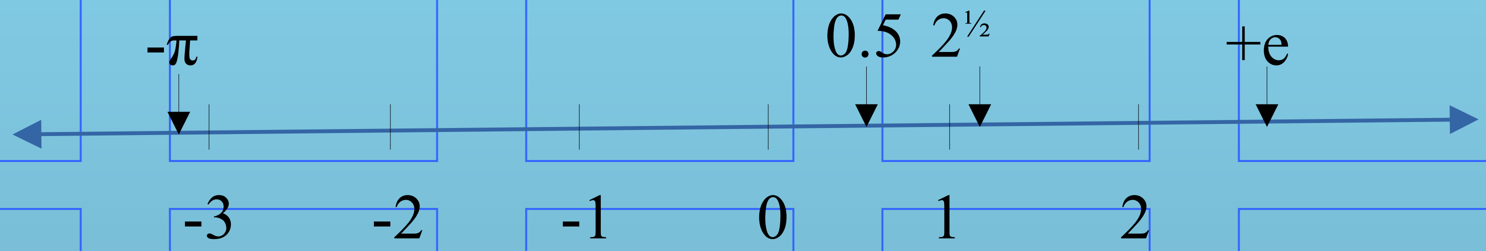
Ensemble des nombres réel **R**



Quel est le cardinal de **R** ?

THEORIE DES ENSEMBLES

Ensemble des nombres réel **R**



Quel est le cardinal de **R** ?
On ne peut pas trouver une bijection entre **R** et **N**, on ne peut pas «compter» **R** avec **N**, **R** n'est pas dénombrable.
Alors, par définition, card **R** = Ω

Et card **R** > card **N** (**Ω** > ∞)

THEORIE DES ENSEMBLES

L'ensemble des nombres réel [0..1] n'est pas dénombrable.

Preuve par l'absurde

0 - 0 . **1** 2 5 4 8 9 2 4 ...
1 - 0 . 4 **5** 3 7 6 9 1 7 ...
2 - 0 . 6 4 **4** 6 2 0 1 0 …
3 - 0 . 7 5 9 **1** 0 3 8 4 ...
4 - 0 . 9 8 0 8 **2** 4 4 2 …

Si c'est un 5, on le change en 9.
Si c'est pas 5, on le change en 5.

(On pourrait avoir une autre stratégie, ajouter 1 à chaque fois)

THEORIE DES ENSEMBLES

L'ensemble des nombres réel [0..1] n'est pas dénombrable (pas de bijection possible entre **N** et **R**, on ne pas les «compter»).

Preuve par l'absurde

0 - 0 . **1** 2 5 4 8 9 2 4 ...
1 - 0 . 4 **5** 3 7 6 9 1 7 ...
2 - 0 . 6 4 **4** 6 2 0 1 0 …
3 - 0 . 7 5 9 **1** 0 3 8 4 ...
4 - 0 . 9 8 0 8 **2** 4 4 2 …

Cela devient

0 - 0 . **5** 2 5 4 8 9 2 4 ...
1 - 0 . 4 **9** 3 7 6 9 1 7 ...
2 - 0 . 6 4 **5** 6 2 0 1 0 …
3 - 0 . 7 5 9 **5** 0 3 8 4 ...
4 - 0 . 9 8 0 8 **5** 4 4 2 …
? - 0 . 5 9 5 5 5 ...

Est-ce que ce nouveau nombre existe dans la liste ?
Ça ne peut pas être le premier, 5<>1
Ni le 2ème, car 9<>5
Ni le 3ème, car 4<>5
Ni le 526ème ...
Ni …

Alors il n'existe pas dans la liste, quelque soit la manière dont on a rangé la liste → pas de bijection et pas dénombrable

THEORIE DES ENSEMBLES

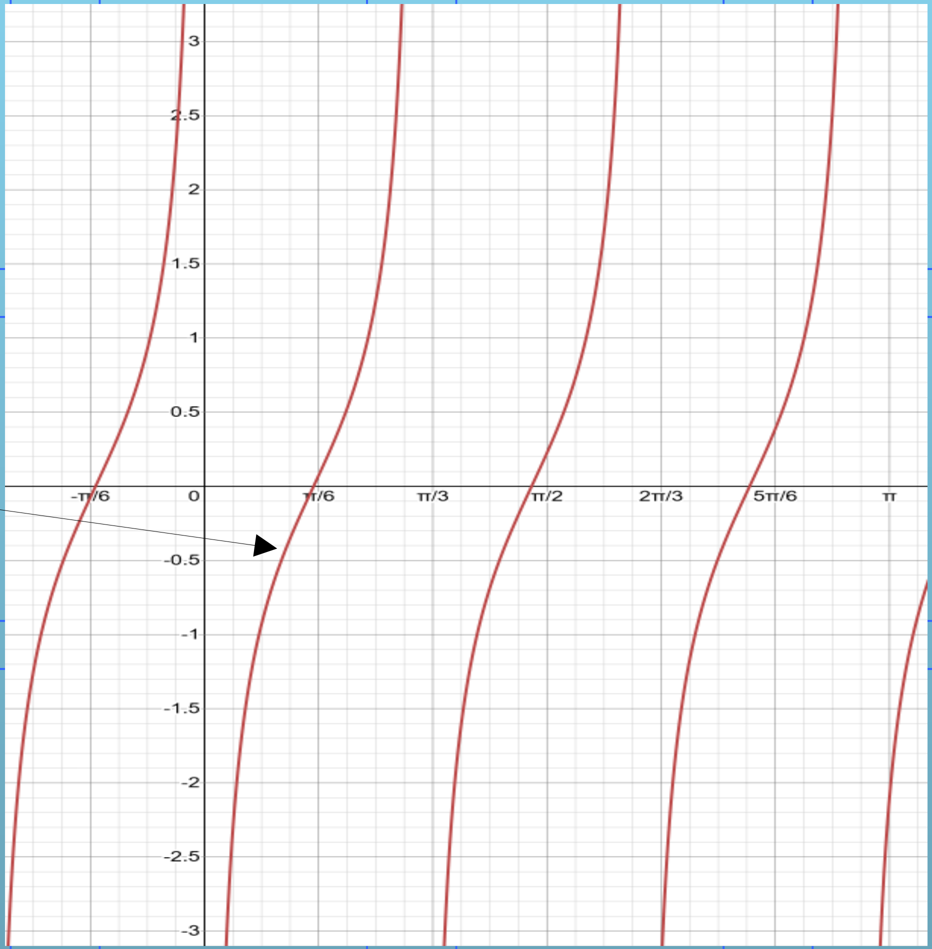
Quel est le cardinal de l'ensemble des nombres réel]0..1[?

Est-il différent de card **R** ?

THEORIE DES ENSEMBLES

Il suffit de trouver une bijection entre]0..1[et **R**
Par exemple, cette fonction

f(x) = tan(π * (x-1/2))



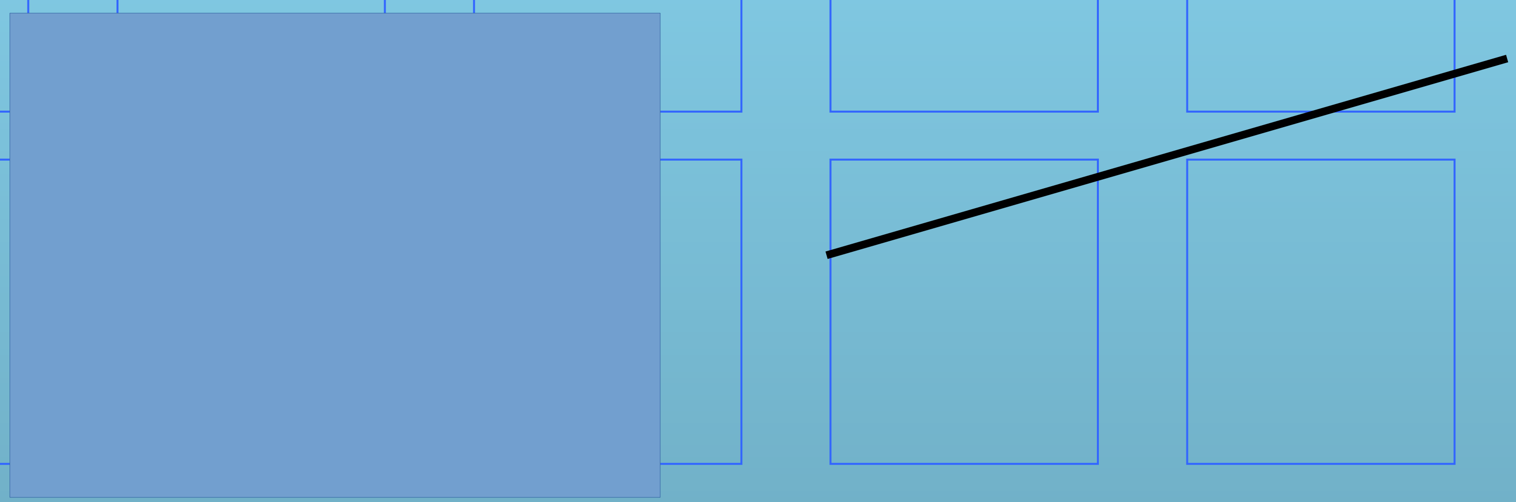
Avec x ε]0..1[

On voit que card]0..1[= card **R = Ω**

cf https://www.mathway.com/Trigonometry

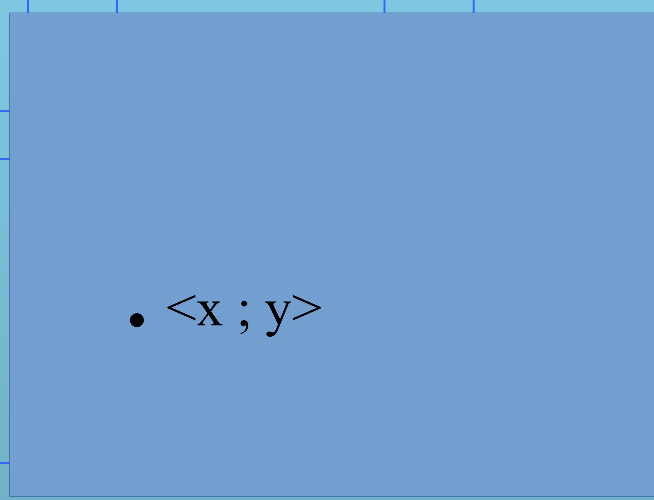
THEORIE DES ENSEMBLES

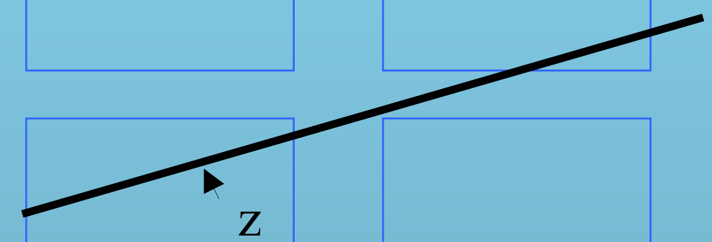
Soit un rectangle et une droite. Y-a-t-il le même nombre de points ?



THEORIE DES ENSEMBLES

Soit un rectangle et une droite. Y-a-t-il le même nombre de points ?





z=0.46125395…

x=0.4159…

y=0.6235...

Cette méthode me crée une bijection, alors card rectangle = card ligne = Ω

THEORIE DES ENSEMBLES

Existe-t-il des ensembles dont le cardinal se trouve entre Ω et ∞ ?

Cette hypothèse porte le nom de l'hypothèse du continu.

Elle a résisté à toutes les tentatives de réponse, jusqu'à ce que Kurt Gödel (1906-1978) :

Gödel a également démontré la complétude du calcul des prédicats du premier ordre. Il a aussi démontré la cohérence relative de l'hypothèse du continu, montrant qu'elle ne peut pas être réfutée à partir des axiomes admis de la théorie des ensembles, en admettant que ces axiomes soient cohérents.

Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del